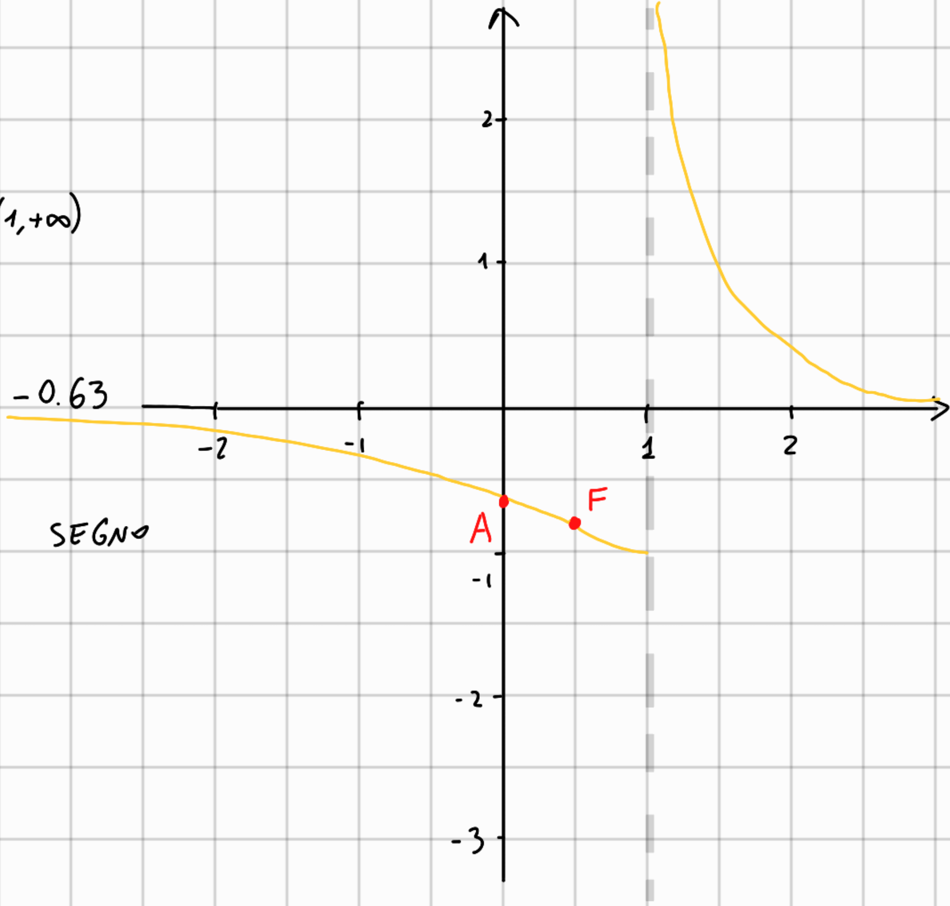
ESAME MATEMATICA e STATISTICA 6 SETTEMBRE 2024

ESERCIZIO 1

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-1}} - 1$$



☐ DOMINIO : $x-1 \neq 0$

$x \neq 1$ $\quad D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

☐ INTERSEZIONE ASSE y

$$f(0) = e^{\frac{1}{-1}} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} \simeq -0.63$$

☐ INTERSEZIONE ASSE X E STUDIO SEGNO

$$e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1}{x-1} \geq 0$$

- $1 \geq 0 \ \mathbb{R}$
- $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

$-$ $+$ 1

f è POSITIVA per $x > 1$

f è NEGATIVA per $x < 1$

f è NULLA per nessun valore $\rightarrow$ NO INTERSEZIONI ASSE X

☐ LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 = 0$

ASINTOTO ORIZZONTALE COMPLETO $\boxed{y = 0}$

- $\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 = e^{\frac{1}{0^-}} - 1 = e^{-\infty} - 1 = -1 \rightarrow$ la funzione tende al punto $(1, -1)$

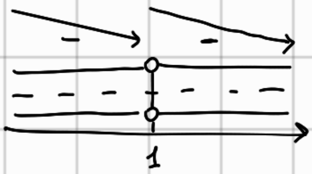
$e^{-\infty} \rightarrow 0$

- $\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 = e^{\frac{1}{0^+}} - 1 = +\infty$ ASINTOTO VERTICALE DESTRO $\boxed{x = 1}$

☐ STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

- $e^{\frac{1}{x-1}} \geq 0 \quad \forall x \in D$
- $-1 \geq 0 \quad \emptyset$
- $(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in D$



f è CRESCENTE MAI

f è DECRESCENTE $\forall x \in D$

f è STAZIONARIA MAI

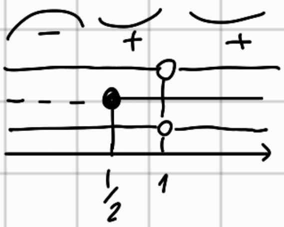
☐ STUDIO DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \left[e^{\frac{1}{x-1}}\right]'\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-1}}\left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}\right] = \left[e^{\frac{1}{x-1}} \frac{-1}{(x-1)^2}\right]\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-1}}\left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}\right]$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)^4} + e^{\frac{1}{x-1}} \frac{2x-2}{(x+1)^4} = e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1+2x-2}{(x-1)^4} = e^{\frac{1}{x-1}} \frac{2x-1}{(x-1)^4}$$

$$e^{\frac{1}{x-1}} \frac{2x-1}{(x-1)^4} \geq 0$$

- $e^{\frac{1}{x-1}} \geq 0 \quad \forall x \in D$
- $2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$
- $(x-1)^4 > 0 \quad \forall x \in D$



- f è CONCAVA per $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
- f è CONVESSA per $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$
- f presenta un punto di flesso $x = \frac{1}{2}$

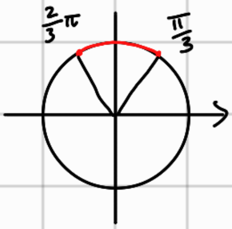
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{\frac{1}{2}-1}} - 1 = e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} - 1 = e^{-2} - 1 \simeq -0.86$$

$$F = \left(\frac{1}{2}, e^{-2} - 1\right)$$

b. $f'(0) = e^{\frac{1}{-1}}\left(\frac{-1}{(-1)^2}\right) = -e^{-1} \simeq -0.36 \rightarrow$ il valore è negativo la funzione in questo punto è decrescente, con pendenza $m = -e^{-1}$

c.

$$\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

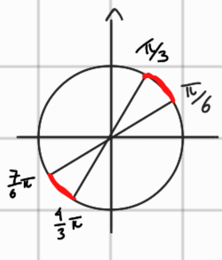


$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$k = 0 \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$

$k = 1 \quad \frac{7}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$



ESERCIZIO 2

a. $$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

b. $$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_{-1}^{0} = \operatorname{arctg}(0-1) - \operatorname{arctg}(1-1) = \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{=0} = \frac{\pi}{4}$$

c. $$\int_{-1}^{0} (f(x)+2)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{-1}^{0} 2\,dx}_{=\,2x\big|_{-1}^{0} = 2\cdot 0 - 2\cdot(-1) = 2>0} > \int_{-1}^{0} f(x)$$

OPPURE

Poiché $f(x)+2 > f(x)$ PER PROPRIETÀ DI MONOTONIA INTEGRALI

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b (f(x)+2)\,dx > \int_a^b (f(x))\,dx$$

ESERCIZIO 3

$$C(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{3t-t^2}$$

Cerco il p.to di massimo

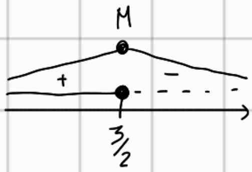
$$C'(t) = \frac{3}{4} e^{3t-t^2}(3-2t) \geq 0$$

- $\frac{3}{4} e^{3t-t^2} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- $3-2t \geq 0$

  $-2t \geq -3$

  $t \leq \frac{3}{2}$



$t_M = \frac{3}{2}$ p.to di MAX

ESERCIZIO 4

a. Vogliamo stabilire se le estrazioni sono compatibili con la distribuzione di probabilità indicata dal mercante
Eseguiamo un test χ^2 di adattamento.
I possibili eventi sono $K = 3$
Le frequenze ottenute sono $F_1 = 57,\ F_2 = 36,\ F_3 = 7$
Le frequenze attese sono $E_1 = 50,\ E_2 = 30,\ E_3 = 20$

ν \ α	0.1	0.5	0.01	0.001
2	4.605	5.991	9.210	13.816
	✓	✓	✓	×

$$\chi^{2\,*}_{2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(E_i - F_i)^2}{E_i} = \frac{(50-57)^2}{50} + \frac{(30-36)^2}{30} + \frac{(20-7)^2}{20} = \frac{49}{50} + \frac{36}{30} + \frac{169}{20} = 10.63 > 9.210$$

↓

IL MERCANTE IMBROGLIA AL 99 %

b.

X	10.0	11.2	9.7	7.9	8.5	9.1

$$\bar{x} = \frac{10.0 + 11.2 + 9.7 + 7.9 + 8.5 + 9.1}{6} = \frac{56.4}{6} = 9.4$$

Dati riordinati 7.9 8.5 9.1 9.7 10.0 11.2

$$\text{MEDIANA}(X) = \frac{9.1 + 9.7}{2} = 9.4$$

VARIANZA CAMPIONARIA

$$S^2 = \frac{1}{5}\left[(10-9.4)^2 + (11.2-9.4)^2 + (9.7-9.4)^2 + (7.9-9.4)^2 + (8.5-9.4)^2 + (9.1-9.4)^2\right] =$$

n - 1

$$= \frac{1}{5}\left[(0.6)^2 + (1.8)^2 + (0.3)^2 + (-1.5)^2 + (-0.9)^2 + (-0.3)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[0.36 + 3.24 + 0.09 + 2.25 + 0.81 + 0.09\right] = \frac{6.84}{5} = 1.368$$